MAI 1 - domácí úkol (ze cvičení) 9. (opravené zadání)

1. Ukažte (vyberte si aspoň jedno z následujících tvrzení):

   a) pro $x \in (0,\infty)$ platí $\ln x \le x-1$;

   b) $x \in (0,\infty)$ platí $x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$

   c) opraveno: (i) $x \in (0,\infty)$ platí $e^{\frac{x}{x+1}} < x+1$;

   nebo (*) (ii) $x \in (-1,\infty)$ platí $e^{\frac{x}{x+1}} \le x+1$.

2*. A chcete-li, „zkuste" („nepovinné"):
Ukažte, že platí :
Je-li $f''(x) > 0$ (resp. $f''(x) < 0$) v intervalu (a,b), pak pro lib. $x_0 \in (a,b)$ a všechna $x \in (a,b)$, $x \ne x_0$ je $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ (resp. $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$).
(Odtud se pak snadno ukáže např. platnost nerovností $\ln(x+1) < x$ pro $x > -1$, $x \ne 0$).

3. Sepište (co nejlépe) důkaz tvrzení:
   Když $f'(x) = g'(x) \in R$ pro $x \in (a,b)$, pak existuje konstanta $c \in R$ tak, že na intervalu (a,b) je $f(x) = g(x) + c$.

4. Najděte Taylorův polynom
   a) $T_n^{f,0}(x)$, je-li $f(x) = \sqrt{1+x}$;
   b) $T_2^{f,0}(x)$, je-li $f(x) = \ln(1+\sin 2x)$.

5. Odhadněte chybu v aproximaci funkce $f(x) = \sin x$ Taylorovým polynomem 3.stupně pro $|x| \le \frac{1}{2}$
   (a srovnejte s kalkulačkou výpočet (např.) sin(0,1) a sin(0,01) pomocí tohoto Taylorova polynomu) .

6. Užitím Taylorova polynomu spočítejte aspoň jednu z limit

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \exp(-\frac{x^2}{2})}{x^4}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - x^2 \ln(1+\frac{1}{x}))$.

   (Nápověda, chcete-li, pro příklad b) : zkuste danou limitu u ∞ užitím VLSF „změnit" na limitu v bodě 0 .)